Séries de Fourier

Exercice 1 – ***Sommes usuelles.***
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f et étudier la convergence de la série de Fourier $S(f)$ de f.
2. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Exercice 2 – ***Sommes usuelles (2).***
Soit $f : R \to R$ la function 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier (exponentiels) de la fonction f et étudier la convergence de la série de Fourier $S(f)$ de f.
2. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 3 – ***Inégalité de Wirtinger.***
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$.

1. Montrer

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} \left|f'(t)\right|^2 dt$$

2. Caractériser l'égalité.

Exercice 4 – ***Inégalité Isopérimétrique.***
Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ et $\left|\gamma'(t)\right| = 1$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (γ est une courbe fermée paramétrée par longueur d'arc). On note

$$A = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \gamma(t)\overline{\gamma'(t)}dt$$

(A est l'aire algébrique du domaine enlacé par la courbe γ).

1. Montrer que

$$|A| \leqslant \pi,$$

2. Caractériser l'égalité.

Exercice 5 – ***Phénomène de Gibbs.*** **
On considère le signal carré φ, qui est la fonction 2π-périodique, égale à 1 sur $]0, \pi[$, à 0 sur $]\pi, 2\pi[$, et qui vaut $1/2$ en ses points de discontinuité.

1. Calculer la série de Fourier de φ, montrer qu'elle converge simplement vers φ et même uniformément sur tout intervalle fermé ne contenant pas les discontinuités de φ.
2. Montrer que les sommes partielles d'indice impair $s_{2n-1}(t)$ de la série de Fourier de φ admettent la représentation intégrale

$$s_{2n-1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2ns}{\sin s} ds$$

3. Calculer les points critiques de s_{2n-1} sur $[0,\pi]$ et la valeur de son maximum.
4. Montrer que ce maximum converge lorsque n tend vers l'infini vers le nombre

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin s}{s} ds,$$

puis conclure (on admet qu'une valeur approximative à 10^{-3} près est $M \approx 1,089$).

Exercice 6 – ***Théorème de Féjer.***
On note $\mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans C et 2π-périodiques. On définit le produit de convolution de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ par

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y) f_2(y) \mathrm{d}y.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathrm{C}$ la fonction définie par

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l} e^{imx}$$

1. Montrer que

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}\frac{1-\cos kx}{1-\cos x} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ k & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Montrer que φ_k satisfait les propriétés suivantes :
   — $\forall k, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 1\,;$
   — $\forall \varepsilon \in]0,\pi\left[, \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\in[\varepsilon,\pi]}\varphi_k(x)\mathrm{d}x \to 0\right.$ lorsque $k \to \infty$.

   En déduire que, si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $f * \varphi_k$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f * \varphi_k$. Conclure.

Exercice 7 – ***Convergences.*** ***
Soit (λ_n) une suite positive, décroissante et tendant vers 0 .

1. Montrer que la série de fonctions $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$, et que f est continue sur $]0,2\pi[$.
2. Si$\lambda_n = o(1/n)$ lorsque $n \to +\infty$, montrer que $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. Réciproquement, si $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, montrer que $\lambda_n = o(1/n)$.
4. Plus généralement, si f est continue sur $\mathbb{R}$ montrer que $\lambda_n = o(1/n)$. (*Considérer* $F(x) = \int_0^x f(t)dt.$)

Exercice 8 – ***Formule de Poisson.***
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(x) = O\left(1/x^2\right)$ et $f'(x) = O\left(1/x^2\right)$ lorsque $|x| \to +\infty$.

1. Après avoir justifié l'existence des sommes infinies, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi nx}$ où $\quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi nt} dt$ (formule sommatoire de Poisson).
2. (Application.) Montrer que

$$\forall s > 0, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/s}$$