Exercices de Probabilité

Exercice 1 – ***Loi Gamma***. Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\Gamma(a, \lambda)$ par sa densité relativement à la mesure de Lebesgue :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x) \, .$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité et calculer l'espérance de cette loi.
2. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi $\Gamma(a, \lambda)$.
   (a) Déterminer la loi de λX et montrer que $X + Y$ et X/Y sont des v.a. indépendantes dont on calculera la loi.
   (b) Montrer que $X + Y$ et $X/(X + Y)$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $X/(X + Y)$.
3. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes de loi $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$ respectivement, pour $b > 0$. Déterminer la loi de $X + Y$.
4. Soient $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ des v.a. réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2$ suit une loi $\Gamma(n/2, 1/2)$ (également appelée loi du khi-deux et notée $\mathcal{X}_n^2$).

Exercice 2 – ***Théorème de Cochran***. Soit Z un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ d'espérance nulle et de matrice de covariance I_n où I_n est la matrice identité de dimension n. Supposons que $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme la somme directe de J sous-espaces vectoriels orthogonaux $V_1, ..., V_J$ de dimensions respectives $p_1, ..., p_J$. On désigne par Π_{V_j} la matrice de projection orthogonale sur V_j.

1. Montrer que $\Pi_{V_1} Z, ..., \Pi_{V_k} Z$ sont des vecteurs aléatoires indépendants. Déterminer leurs lois.
2. Montrer que $||\Pi_{V_j} Z||^2$ suit la loi $\chi^2(p_j)$ pour tout $1 \le j \le J$.
3. Application. Soient X_i, $i = 1, ..., n$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Déterminer la loi jointe du vecteur aléatoire $(\bar{X}_n, S_n^2)$.

Exercice 3 – ***Tomber dans le cercle***. Soient X, Y, Z trois vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi gaussienne standard. Montrer que la probabilité que Z tombe dans le cercle de diamètre $Y - X$ qui passe par X et Y vaut $\frac{1}{4}$.

Exercice 4 – ***Probabilité de survie***. Soit $(X_{n,k})_{n \ge 1, k \ge 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi μ sur $\mathbb{N}$. On note $m = \sum_{k \ge 0} k \mu(k)$. Posons $Z_0 = 1$ et pour tout $n \ge 1$,

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

1. Soit g la fonction génératrice de la loi μ. Démontrer que la fonction génératrice g_{Z_n} de Z_n vérifie $g_{Z_n} = g^{\circ n}$.
2. Soit A l'événement $A := \cap_{n \ge 0} \{Z_n \ge 1\}$. Démontrer que $1 - \mathbb{P}(A)$ est un point fixe de g sur $[0, 1]$.
3. On suppose que $m \ge 1$. Démontrer $\mathbb{P}(A) = 0$.
4. On suppose que $m > 1$. Démontrer $\mathbb{P}(A) > 0$.

Exercice 5 – ***Taille totale de la population***. On reprend les mêmes notations que l'exercice précédent. On note $T = \sum_{n \ge 0} Z_n$. Si $m < 1$, démontrer que $\mathbb{E}[T] = 1/(1 - m)$.

Exercice 6 – ***Percolation***. On considère un graphe $\mathcal{G}$ formé d'un ensemble (fini ou dénombrable) de sites $\mathcal{S}$ et d'un ensemble d'arêtes $\mathcal{A}$ (une famille de couples de sites).

On définit une famille de variables aléatoires $(\omega(a), a \in \mathcal{A})$ indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. En d'autres termes, pour chaque arête a, on tire indépendamment pile (càd 1) avec probabilité p ou face (0) avec probabilité $1 - p$. Lorsque $\omega(a) = 1$, on dit que l'arête a est ouverte, et sinon fermée. On note P_p la loi correspondante.

Une réalisation de ω définit donc un sous-graphe aléatoire de $\mathcal{G}$ formé de sites $\mathcal{S}$ et des arêtes ouvertes pour ω. Souvent, on identifie la réalisation $\omega = (\omega(a), a \in \mathcal{A})$ avec le graphe qu'elle définit.

On considère le cas du graphe $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$.

1. Lorsque $d = 1$, p.s. existe t-il une composante connexe infinie ?

   Notre but est de démontrer le résultat suivant.

   Théorème. Lorsque $d \geq 2$, il existe $p_c = p_c(d) \in (0, 1)$ tel que :

   — pour tout $p < p_c$, ω n'a presque sûrement pas de composante connexe infinie.

   — pour tout $p > p_c$, ω a presque sûrement (au moins) une composante connexe infinie.
2. On note $A = \{\omega$ a au moins une composante connexe infinie $\}$. Montrer que $P_p(A) = 0$ ou 1.
3. Montrer que $p \mapsto P_p(A)$ est croissante.
4. Montrer que pour p suffisamment petit, presque sûrement il n'existe pas de chemin ouvert de longueur infinie issue de l'origine.
5. En déduire que $p_c > 0$.
6. Montrer que si p est suffisamment proche de 1 alors presque sûrement il existe un chemin ouvert de longueur inifnie issue de l'origine. En déduire que $p_c < 1$.
7. Quelle est la probabilité critique p_c pour la percolation (par arêtes) dans un arbre binaire (chaque site, sauf la racine, est relié à trois voisins, et le graphe ne comporte pas de cycle). Pour $p = p_c$, existe t'il une composante connexe infinie ?