Calculs d'intégrales, Espaces $\mathcal{L}^p$ & Convolution

1 Intégrales à paramètre

Exercice 1 – ***Étude de fonction***. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable, et soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $F(t) := \displaystyle\int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que F soit dérivable en 0.

Exercice 2 – ***Une limite d'intégrales [1]***. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \to [0,+\infty]$ telle que $\int_X f\, \mathrm{d}\mu = 1$, et $\alpha > 0$. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n \log\left(1 + \frac{f^\alpha}{n^\alpha}\right) \mathrm{d}\mu.$$

Exercice 3 – ***Autour de la fonction Γ [2, 3]***.

1. Montrer que $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, \mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $s > 0$.
2. Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ et donner une expression de ses dérivées.
3. En utilisant la suite de fonctions $\left(f_n : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{1}_{]0,n[}(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\right)_{n\geq1}$, montrer la formule de Gauss :

$$\forall s > 0, \quad \Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

Exercice 4 – ► DEV ◄ ***Intégrale de Dirichlet [4]***. L'objectif de cet exercice est de justifier l'existence et de calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, effectivement, $\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

Dans la suite de l'exercice on introduit la fonction $F : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$.

2. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. En déterminant la limite de F en $+\infty$, obtenir une expression simple de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Conclure en démontrant que F est continue en 0.

Exercice 5 – ***Transformée de Fourier d'une gaussienne***. On pose $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$ pour $\alpha > 0$.

1. Calculer l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}_+} f_1(x)\, \mathrm{d}x$.
   Indication : introduire les fonctions $g : x \mapsto (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2$ et $h : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et exprimer $g + h$.
2. Calculer la transformée de Fourier de f_α :

$$\mathcal{F}(f_\alpha) : \zeta \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x) e^{i\zeta x}\, \mathrm{d}x.$$

   Indication : déterminer une équation différentielle vérifiée par $\mathcal{F}(f_\alpha)$.

2 Théorèmes de Fubini

Exercice 6 – ***Interversion de sommes [5]***. Soit $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ une suite de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} a_{m,n} = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} a_{m,n}.$$

Exercice 7 – ***Contre-exemple au théorème de Fubini-Tonelli ?***. Donner un exemple de fonction φ positive, continue sur $]-1,1[^2$, d'intégrale finie, mais telle que $\int_{]-1,1[} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y$ soit infinie pour certains $x \in]-1,1[$.

Exercice 8 – ***Les hypothèses des théorèmes de Fubini***. Soient $X = Y = [0,1]$ munis (sauf contre-indication) de la mesure de Lebesgue.

1. Soit $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'éléments convergeant vers 1 et telle que $\delta_1 = 0$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n une fonction continue positive d'intégrale 1 et à support dans $]\delta_n, \delta_{n+1}[$, puis :
$$f : (x,y) \in X\times Y \longmapsto \sum_{n\geq 1} \big(\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\big)\varphi_n(y).$$
Calculer
$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$
2. On admet (cela découle de l'hypothèse du continu) qu'il existe une partie $Q \subset X\times Y$ telle que :
$(\star)$ $Q \cap (X\times\{y\})$ est dénombrable pour tout $y \in Y$,
$(\star\star)$ $Q\cap(\{x\}\times Y)$ est de complémentaire dénombrable pour tout $x \in X$.
Calculer les mêmes intégrales qu'à la question 1. avec $f = \mathbb{1}_Q$.
3. On suppose désormais que Y est muni de la mesure dénombrement μ. Pour $f : (x,y) \mapsto \mathbb{1}_{x=y}$, calculer
$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu(y).$$

Dans chaque cas, que conclure vis-à-vis des théorèmes de Fubini ?

Exercice 9 – ***Calculs d'intégrales***. 1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ en considérant $f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,\mathrm{d}x$ où $t > 0$ en remarquant que $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy)\,\mathrm{d}y$.

3 Espaces $\mathcal{L}^p$ et Convolution

Exercice 10 – . Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)\cap\mathcal{L}^q(E,\mathcal{A},\mu)$ avec $p,q \in]1,+\infty[$. On suppose que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^p} 0$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{L}^q$. Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^q} 0$.
Le résultat persiste-t-il si l'on ne suppose plus que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{L}^q$?

Exercice 11 – ***Super Hölder***. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soient $p,q,r \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, on a $fg \in \mathcal{L}^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Exercice 12 – ***Quelques généralités***. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable sur X, non presque partout nulle. On note E l'ensemble des $p \in [1,+\infty[$ tels que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et on note $\varphi(p) = \int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu$.

1. Montrer que E est un intervalle.
2. Montrer que E peut être n'importe quel intervalle (on prendra bien compte de distinguer les bornes ouvertes et fermées !).
3. Montrer que $\ln(\varphi)$ est convexe sur E.
4. Montrer que φ est continue sur E.
5. Supposons E non vide. Montrer que $\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.

Exercice 13 – $L^\infty(\mathbb{R}^d,\lambda_d)$ ***n'est pas séparable [6]***. 1. Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E tels que :

(a) pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E,

(b) $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$,

(c) I n'est pas dénombrable.

Montrer que E n'est pas séparable.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $f_x = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(x,1)}$ où $\mathcal{B}(x,1) \subset \mathbb{R}^d$ est la boule fermée de centre x et de rayon 1. En utilisant la famille d'ouverts $(O_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ avec

$$O_x = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d),\ \|f - f_x\|_\infty < \frac{1}{2} \right\},$$

montrer que $L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ n'est pas séparable.

Exercice 14 – . Soient $I =]0,1[$, et $p \in [1, +\infty[$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ nulle en dehors de I. Pour $h > 0$, on définit f_h par

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f_h est bien définie.
2. Montrer que f_h est continue.
3. Montrer que $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.
4. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0^+} \|f_h - f\|_p = 0$.

Exercice 15 – ***Continuité de l'opérateur de translation sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ [5].*** Pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, on pose $\tau_h f : x \mapsto f(x-h)$ et on note $|h| = \|h\|_\infty$.

1. Montrer que $\tau_h : f \mapsto \tau_h f$ est une isométrie de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^d$.
2. On suppose que $p < +\infty$. Montrer que pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{|h|\to+\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

Les résultats persistent-t-ils lorsque $p = +\infty$?

3. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, et soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On suppose d'abord que $p < +\infty$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\alpha_n * f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\|\alpha_n * f - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \alpha_n(y)\,\mathrm{d}y$.

   (c) En déduire que $\alpha_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^p} f$.

   (d) Le résultat persiste-t-il si $p = +\infty$?

4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour $p < +\infty$.
5. Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ et telle que $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$, convergeant vers f dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et dont les dérivées convergent vers f' dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
6. (*Lemme de Riemann-Lebesgue*) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, montrer que

$$\mathcal{F}(f)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\zeta x}\,\mathrm{d}x \underset{|\zeta|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication : on pourra remarquer que $\mathcal{F}(f)(\zeta) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\zeta(x+\frac{\pi}{\zeta})}\,dx$ *pour* $\zeta \neq 0$.

Références

[1] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2ème ed., 1998.

[2] X. Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème ed., 2008.

[3] H. Queffélec and C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème ed., 2013.

[4] O. Garet and A. Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités*. Ellipses, 2011.

[5] M. Briane and G. Pagès, *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème ed., 2015.

[6] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.