Mesure & Intégration

Exercice 1 – ***II-13 [1]***.

1. Montrer que, pour tout a et b dans $]0, +\infty[$, on a :
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} d\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}$$
où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Si p et q sont deux réels positifs, montrer que :
$$\int_{[0,1]} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$$
où λ est la mesure de Lebesgue sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. En déduire une expression de $ln(2)$ et de $\frac{\pi}{4}$.
3. Pour $p \in]0,1[$, montrer que :
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^{p-1}}{1+x} d\lambda(x) = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2p}{p^2-n^2}$$
où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 – ***II-16 [1]***.

1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x + A = \{x + a, a \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit λ la mesure de Borel sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\mu : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \mapsto \mu(A) = \lambda(x + A)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout borélien A de $\mathbb{R}$, $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ (i.e λ est invariante par translation).
3. Montrer que si μ est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation et telle que $\mu([0,1]) = 1$, alors $\mu([0, \frac{1}{n}]) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la mesure de Borel λ est la seule mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation et telle que $\lambda([0,1]) = 1$.

Exercice 3 – ***II-17 [1] : Théorème de Steinhaus***. Soit A un compact de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(A) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n := \bigcup_{a \in A}]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} \subseteq U_n$ et que $\cap_{n \geq 1} U_n = A$. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda(A) > \frac{2}{3}\lambda(U_N) > 0$.
2. Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < \frac{1}{N}$. On définit $A_Z := \{a - z, a \in A\}$. En utilisant l'invariance de λ par translation, montrer que $\lambda(U_N \backslash (A \cap A_z)) < \frac{2}{3}\lambda(U_N)$. Prouver que $A \cap A_z \neq \emptyset$.
3. En utilisant 1) et 2), monter le théorème de Steinhaus :
Si A est un compact de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue non nulle alors l'ensemble
$$A - A := \{x - y \in \mathbb{R}, \text{ où } (x, y) \in A^2\}$$
est un voisinage de 0.

Exercice 4 – ***IV-5 [1]***. Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite de chacune des expressions suivantes :

1. $\lim_n \int_0^n (\ln x)(1 - \frac{x}{n})^n dx$. En déduire $\lim_n [\ln n - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})]$.
2. $\lim_n \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^2} dx$.
3. $\lim_n \int_0^{+\infty} e^{-n \sin^2 x} f(x) dx$ où f est une fonction continue intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
4. $\lim_n \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$.

Exercice 5 – ***IV-8 [1]***. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que, si p et q sont deux réels de $[1, +\infty[$ avec $p < q$, alors $\mathcal{L}^\infty \subseteq \mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p \subseteq \mathcal{L}^1$. Montrer par un exemple que l'hypothèse $\mu(\Omega) < +\infty$ est nécessaire. Toujours par des exemples, montrer qu'en général $\cap_{p \in [1,+\infty[} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^\infty$ et que $\cup_{p \in]1,+\infty[} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^1$

Exercice 6 – ***III-2 [2]***. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et continue sur $[a, b]$.

1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$$

2. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue prenant des valeurs strictement positive sur $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(t)^n g(t) dt \right)^{\frac{1}{n}} = M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$$

Exercice 7 – ***III-4 [2]***. Soient E un espace euclidien et $f : [a, b] \to E$ une fonction continue. On suppose que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Montrer qu'il existe un vecteur $e \in E$ de norme 1 tel que $f(t) = \|f(t)\| \cdot e$. pour tout $t \in [a, b]$.

Références

[1] J.-P. Ansel, "Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration," 1995.

[2] X. Gourdon, "Les maths en tête," 1994.